Chapter 6-2: 簡諧運動補充

1 圓的參數式

一般式：以 $y = f(x)$ 為形式寫成，例如：$y = 2x - 1$。
參數式：以 $x = x(t)$ 及 $y = y(t)$ 寫成，例如：

$$\begin{cases} x = t/2 \\ y = t - 1 \end{cases}$$

圓的參數式常用參數為 θ，代表角度。

圓的一般式為：$x^2 + y^2 = R^2$，R 是半徑，若令：

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

其中 θ 可為任意實數，則圓上一點 $\mathrm{P}(x, y)$ 必定滿足上式。

我們也可以將物理轉動的概念導入：令 $\theta = \omega t$，

$$\begin{cases} x = R\cos(\omega t) \\ y = R\sin(\omega t) \end{cases} \tag{1}$$

這就是一個以點 $(R, 0)$ 為起點（$t = 0$ 代入），並且以角速度 ω 做逆時針轉動的等速率圓周運動

2 三角函數的微分

微分的作用為：找出一個函數的斜率。數學上的定義寫成：

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f'(x)$ 就是 $f(x)$ 的斜率函數，又稱為導函數，包含了 $f(x)$ 對於每個 x 位置的斜率資訊。

物理上常常把一個函數對時間微分，以運動學的位置 $x = x(t)$ 為例，若 $x = 2t^2 + t - 1$，以多項式的微分經驗，可知：

$$\begin{cases} v(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = 4t + 1 \\ a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{x} = 4 \end{cases}$$

若是一個物體做等速率圓周運動（如式 (1)），微分時會遇到三角函數，因此這邊提供基本的三角函數微分公式：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sin(\omega t) &= \omega\cos(\omega t) \\ \frac{d}{dt}\cos(\omega t) &= -\omega\sin(\omega t) \\ \frac{d}{dt}\tan(\omega t) &= \omega\sec^2(\omega t) = \frac{\omega}{\cos^2(\omega t)} \end{aligned}$$

所以可以得到一個很有趣的結論：兩個基本三角函數 sin 和 cos 微分兩次之後會得到自己加上負號的結果：

$$\frac{d^2}{dt^2}\sin(\omega t) = \frac{d}{dt}(\omega\cos(\omega t)) = \omega\frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega^2\sin(\omega t)$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\cos(\omega t) = \frac{d}{dt}(-\omega\sin(\omega t)) = -\omega\frac{d}{dt}\sin(\omega t) = -\omega^2\cos(\omega t)$$

所以若是一個函數微分兩次之後，變成自己加上負號（並乘上一個常數 ω），我們就會猜這個函數是由兩個基本的三角函數 sin 和 cos 組成的：

$$\frac{d^2}{dt^2}f(t) = -\omega^2 f(t) \tag{2}$$
$$f(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{3}$$

其中 A 和 B 是常數。這個是一般解，如果想要知道真正的解（即知道 A, B 是多少），我們必須把初始情況（$t = 0$ 時 $f(t)$ 是多少）帶入。但是在高中物理的題目，常常沒有初始情況的要求，所以我們可以挑我們最方便的。為了和圓的參數式相符合，我們挑選 $t = 0$ 時 $(x, y) = (R, 0)$ 的情況，這時 ωt 就會變成和 x 軸的夾角，比較直觀。

3 簡諧運動的運動方程式

想像一個彈簧綁著物體，在水平面上振動，這個振動遵守虎克定律：$F = -kx$，負號代表力和位移反方向，配合牛頓第二運動定律，我們可以寫出下列式子：

$$F = -kx = ma$$

或著更進階一點，套用加速度為位置對時間微分兩次的結果：

$$-kx = m\frac{d^2}{dt^2}x$$
$$-\frac{k}{m}x = \frac{d^2}{dt^2}x$$

這時就符合了式 (2) 的情況，所以我們得到以下解：

$$x(t) = R\cos(\omega t)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

其中 ω 為角頻率，相對於圓周運動的角速度。$x(t)$ 剛好就是圓周運動的 x 座標隨時間的改變函數（見式 (1)），所以我們就可以說簡諧運動是圓周運動在直線（x 軸）上的投影。